

Die ontwikkeling van 'n rekenaarprogram om watervloei in besproeiingskanale te simuleer*

N Benade en GW Annandale

Fakulteit Ingenieurswese, Randse Afrikaanse Universiteit, Universiteitsweg, Aucklandpark 2092, Suid-Afrika.

Abstract

The development of a computer program to simulate water flow in irrigation canals

The simulation of unsteady non-uniform flow of water in irrigation canals consists of the numerical solution of the continuity and dynamic differential equations. These equations are solved by finite differences by using the Preissmann scheme.

Inleiding

Enige besluitneming aangaande die bedryf van besproeiingskemas in Suid-Afrika is huidiglik gebaseer op handberekening; handberekening wat nie vinnig gewysig kan word indien daar 'n skielike verandering in die vraag na water sou wees nie en wat in sommige gevalle tot 'n dag kan neem om uit te voer.

Daar word besef dat menslike foute en onbetroubaarheid van personeel asook fisiese probleme soos byvoorbeeld algegroei 'n hidrae tot bedryfsverliese maak, maar die gevoel is tog dat 'n gerekenariseerde bestuurstelsel vir die ingenieur verantwoordelik vir die bestuur van 'n besproeiingskema van nut sal wees en bedryfsverliese behoort te verminder. Suid-Afrika is nie 'n waterryke land nie en onbeheerde waterverliese wat op besproeiingskemas voorkom moet geminimiseer word.

'n Behoefte het dus ontstaan om 'n tegniek te ontwikkel waarmee bedryfsverwante verliese in besproeiingskanaalstelsels goeioptimiseer kan word.

As 'n basis vir hierdie optimiseringsmodel word daar tans 'n rekenaarprogram ontwikkel wat watervloei in besproeiingskanale kan simuleer. Die rekenaarprogram word ontwikkel in Turbo Pascal vir enige IBM aanpasbare persoonlike rekenaar met 'n interne geheue van ten minste 512 Kb. Grafiese uitvoer word gelewer na die skerm en 'n HP 7475 plotter, die gebruik van 'n plotter is opsioneel. Gedrukte resultate word gelewer na die skerm en enige Epson FX100 of aanpasbare drukker.

Wiskundige model

Vergelykings

Die simulering van ongestadige, nie-uniforme vloei van water in besproeiingskanale behels die numeriese oplossing van die kontinuïteits en dinamiese differensiaalvergelings, nl.

$$\frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} = q \quad (1)$$

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{Q^2}{A} \right) + gA \frac{\partial y}{\partial x} + gA \frac{Q|Q|}{K^2} = 0 \quad (2)$$

waar:

- y = vloediepte vanaf verwysingsvlak
- b = kanaalbreedte
- x = horisontale afstand
- g = swaartekragsversnelling
- q = verliese (verdamping en syfering)
- t = tyd
- A = dwarsnit-area
- Q = deurstroming
- K = dravermoë

Diskretisering en linearisering

Die differensiaalvergelings word opgelos deur middel van die eindige verskilmetode soos voorgestel deur Preissmann (Abbott, 1979). Gemelde metode vergemaklik die hantering van interne randvoorwaardes en is rekenmatig baie effektief.

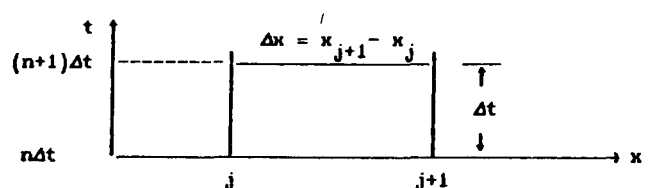
Fig. 1 en Vgl's (3), (4) en (5) toon die diskretisering van die afhanklike veranderlikes en hul differensiale m.b.v. die Preissman-skema.

$$f(x, t) \approx \frac{\theta}{2} [f_{j+1}^{n+1} + f_j^{n+1}] + \frac{1-\theta}{2} [f_{j+1}^n + f_j^n] \quad (3)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} \approx \theta \frac{f_{j+1}^{n+1} - f_j^{n+1}}{\Delta x} + (1-\theta) \frac{f_{j+1}^n - f_j^n}{\Delta x} \quad (4)$$

$$\frac{\partial f}{\partial t} \approx \frac{f_{j+1}^{n+1} - f_{j+1}^n + f_j^{n+1} - f_j^n}{2\Delta t} \quad (5)$$

Waar θ 'n weegkoeffisiënt is om numeriese stabiliteit te verseker. Waardes van θ is groter as 0,5 en kleiner of gelyk aan 1,0.



Figuur 1
Die Preissman-skema.

*Revised article. Originally presented as a paper at the 12th South African Symposium on Numerical Mathematics, July 1986.
Received 12 August 1986.

Kontinuiteitsvergelyking

Die vervanging van al die terme in die kontinuïteitsvergelyking Vgl. (1) met eindige verskille soos voorgestel deur die Preissmann-skema (Vgl's (3), (4) en (5)) lewer:

$$\frac{\partial A}{\partial t} \approx \frac{A_{j+1}^{n+1} - A_{j+1}^n + A_j^{n+1} - A_j^n}{2\Delta t} \quad (6)$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} \approx \theta \left[\frac{Q_{j+1}^{n+1} - Q_j^{n+1}}{\Delta x} \right] + (1-\theta) \left[\frac{Q_{j+1}^n - Q_j^n}{\Delta x} \right] \quad (7)$$

Indien Vgl's (6) en (7) in Vgl. (1) gestel word, lewer dit 'n nie-lineêre vergelyking i.t.v. y_j^{n+1} , Q_j^{n+1} , y_j^n en Q_j^n . Met die toepassing van die Preissmann-metode word aanvaar dat alle funksies $f(y, Q)$ in die bogenoemde vergelyking op die tydstep $n\Delta t$ bekend is. Hierdie vergelyking kan dan gelineariseer word i.t.v. Δy_j , ΔQ_j , Δy_{j+1} en ΔQ_{j+1} deur van die volgende vereenvoudigings gebruik te maak. (Liggett and Cunge, 1975)

$$f^{n+1} = f^n + \Delta f; \quad (\Delta f)^2 \approx \Delta f \cdot \Delta g \approx 0$$

$$\Delta A_j = b_j \Delta y_j$$

Die gelineariseerde vergelyking kan dan herskryf word in die volgende vorm:

$$H_j \cdot \Delta y_{j+1} + B_j \cdot \Delta Q_{j+1} = C_j \cdot \Delta y_j + D_j \cdot \Delta Q_j + G_j \quad (8)$$

Waar:

$$H_j = b_{j+1}; \quad B_j = \frac{2\Delta t \theta}{\Delta x}; \quad C_j = -b_j; \quad D_j = \frac{2\Delta t \theta}{\Delta x}$$

$$G_j = -\frac{2\Delta t}{\Delta x}(Q_{j+1} - Q_j) + 2\Delta t q$$

Dinamiese vergelyking

Diskretisering van die onderskeie terme van die dinamiese vergelyking m.b.v. die Preissmann-skema lewer:

$$\frac{\partial Q}{\partial t} \approx \frac{Q_{j+1}^{n+1} - Q_{j+1}^n + Q_j^{n+1} - Q_j^n}{2\Delta t} \quad (9)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{Q^2}{A} \right) \approx \frac{\theta}{\Delta x} \left[\frac{(Q_{j+1}^{n+1})^2}{(A_{j+1}^{n+1})} - \frac{(Q_j^{n+1})^2}{(A_j^{n+1})} \right] + \frac{(1-\theta)}{\Delta x} \left[\frac{(Q_{j+1}^n)^2}{(A_{j+1}^n)} - \frac{(Q_j^n)^2}{(A_j^n)} \right] \quad (10)$$

$$gA \frac{\partial y}{\partial x} \approx g \cdot \left[\frac{\theta}{2} (A_{j+1}^{n+1} + A_j^{n+1}) + \frac{(1-\theta)}{2} (A_{j+1}^n + A_j^n) \right] \cdot \frac{1}{\Delta x} \left[\theta (y_{j+1}^{n+1} - y_j^{n+1}) + (1-\theta)(y_{j+1}^n - y_j^n) \right] \quad (11)$$

$$gA \frac{Q|Q|}{K^2} \approx \frac{g\theta}{2} \left[\frac{(A_{j+1}^{n+1})(Q_{j+1}^{n+1})|Q_{j+1}^{n+1}|}{(K_{j+1}^{n+1})^2} + \frac{(A_j^{n+1})(Q_j^{n+1})|Q_j^{n+1}|}{(K_j^{n+1})^2} \right] + \frac{g(1-\theta)}{2} \left[\frac{(A_{j+1}^n)(Q_{j+1}^n)|Q_{j+1}^n|}{(K_{j+1}^n)^2} + \frac{(A_j^n)(Q_j^n)|Q_j^n|}{(K_j^n)^2} \right] \quad (12)$$

Net soos in die geval van die kontinuïteitsvergelyking lewer die diskretisering van die dinamiese vergelyking ook 'n nie-

lineêre vergelyking i.t.v. Δy_j^{n+1} , ΔQ_j^{n+1} , Δy_j^n en ΔQ_j^n , wat dan ook gelineariseer kan word i.t.v. Δy_j , ΔQ_j , Δy_{j+1} en ΔQ_{j+1} deur van die volgende vereenvoudigings gebruik te maak. (Liggett and Cunge, 1975)

$$f^{n+1} = f^n + \Delta f; \quad f^n = f; \quad (\Delta f)^2 \approx \Delta f \cdot \Delta g \approx 0$$

$$\Delta A_j = \frac{dA_j}{dy_j} \cdot \Delta y_j = b_j \Delta y_j; \quad \Delta K_j = \frac{dK_j}{dy_j} \cdot \Delta y_j; \quad \Delta b_j = \frac{db_j}{dy_j} \cdot \Delta y_j$$

$$(Q_j + \Delta Q_j)^2 \approx Q_j^2 + 2Q_j \Delta Q_j;$$

$$(Q + \Delta Q)|Q + \Delta Q| = Q|Q| + 2|Q|\Delta Q$$

$$\frac{1}{A_j + \Delta A_j} = \frac{1}{A_j \left[1 + \frac{\Delta A_j}{A_j} \right]} \approx \frac{1}{A_j} \left[1 - \frac{\Delta A_j}{A_j} \right]$$

$$\frac{1}{(A_j + \Delta A_j)^2} = \frac{1}{A_j^2 \left[1 + \frac{\Delta A_j}{A_j} \right]^2} \approx \frac{1}{A_j^2} \left[1 - 2 \cdot \frac{\Delta A_j}{A_j} \right]$$

$$\frac{1}{(K_j + \Delta K_j)^2} = \frac{1}{K_j^2 \left[1 + \frac{\Delta K_j}{K_j} \right]^2} \approx \frac{1}{K_j^2} \left[1 - 2 \cdot \frac{\Delta K_j}{K_j} \right]$$

Die gelineariseerde vergelyking kan dan herskryf word in die volgende vorm:

$$H'_j \cdot \Delta y_{j+1} + B'_j \cdot \Delta Q_{j+1} = C'_j \cdot \Delta y_j + D'_j \cdot \Delta Q_j + G'_j \quad (13)$$

waar:

$$H'_j = -\frac{2\theta\Delta t}{\Delta x} \left[\frac{Q_{j+1}^2 b_{j+1}}{A_{j+1}^2} \right] + \frac{g\theta\Delta t}{\Delta x} \cdot \left[(y_{j+1} - y_j) b_{j+1} + (A_{j+1} + A_j) \right] + g\theta\Delta t \cdot \left[\frac{Q_{j+1}|Q_{j+1}| b_{j+1}}{K_{j+1}^2} - \frac{2A_{j+1}Q_{j+1}|Q_{j+1}|}{K_{j+1}^3} \cdot \frac{dK_{j+1}}{dy} \right]$$

$$B'_j = 1 + \frac{4\theta\Delta t}{\Delta x} \left[\frac{Q_{j+1}}{A_{j+1}} \right] + g\theta\Delta t \cdot \frac{2A_{j+1}|Q_{j+1}|}{K_{j+1}^2}$$

$$C'_j = -\frac{2\theta\Delta t}{\Delta x} \left[\frac{Q_j^2 b_j}{A_j^2} \right] - \frac{g\theta\Delta t}{\Delta x} \cdot \left[(y_{j+1} - y_j) b_j - (A_{j+1} + A_j) \right] - g\theta\Delta t \cdot \left[\frac{Q_j|Q_j| b_j}{K_j^2} - \frac{2A_j Q_j |Q_j|}{K_j^3} \cdot \frac{dK_j}{dy} \right]$$

$$D'_j = -1 + \frac{4\theta\Delta t}{\Delta x} \cdot \left[\frac{Q_j}{A_j} \right] - g\theta\Delta t \cdot \frac{2A_j |Q_j|}{K_j^2}$$

$$G'_j = -\frac{2\Delta t}{\Delta x} \cdot \left[\frac{Q_{j+1}^2}{A_{j+1}} - \frac{Q_j^2}{A_j} \right] - \frac{g\Delta t}{\Delta x} \cdot \left[(A_{j+1} + A_j)(y_{j+1} - y_j) \right] - g\Delta t \cdot \left[\frac{A_{j+1}Q_{j+1}|Q_{j+1}|}{K_{j+1}^2} + \frac{A_j Q_j |Q_j|}{K_j^2} \right]$$

Daar kan dus vir enige twee opeenvolgende nodes $(j, j+1)$ 'n stel lineêre vergelykings in die volgende vorm geskryf word:

$$H_j \Delta y_{j+1} + B_j \Delta Q_{j+1} = C_j \Delta y_j + D_j \Delta Q_j + G_j \quad (14)$$

$$H'_j \Delta y_{j+1} + B'_j \Delta Q_{j+1} = C'_j \Delta y_j + D'_j \Delta Q_j + G'_j \quad (15)$$

Koëffisiënte van Vgl's (14) en (15) kan op enige tydstep t_n bereken word as die waardes van y_j^n , Q_j^n , y_{j+1}^n en Q_{j+1}^n bekend is.

Vir 'n model met N berekeningspunte ($j = 1, 2, \dots, N-1, N$) kan $2(N-1)$ vergelykings neergeskryf word. As twee randvoorwaardes bygevoeg word, het ons 'n stelsel met $2(N-1) + 2 = 2N$ algebraïese vergelykings en $2N$ onbekendes ($\Delta y_j, \Delta Q_j$). Enige stelsel kan dus vir enige tydstep Δt opgelos word.

Dit moet egter beklemtoon word dat linearisering van die oorspronklike vergelykings slegs geldig is indien $\Delta f < f$. As aan hierdie voorwaarde nie voldoen word nie kan Vgl's (14) en (15) nie beskou word as 'n goeie benadering vir die stelsel van nie-lineêre vergelykings nie. Indien Δf egter dieselfde orde grootte as f het vir 'n gegewe Δt , kan 'n mens omtrent altyd die verhouding van $\frac{\Delta f}{f}$ kleiner maak deur 'n kleiner tydstep Δt en gevolglik die vereiste, dat $\Delta f < f$ moet wees, bevredig.

Numeriese oplossing m.b.v. dubbelveegmetode

Vergelykings (14) en (15) moet opgelos word vir alle nodes vir elke tydstep Δt gedurende periode van berekening. Hierdie stel vergelykings vorm 'n stelsel van lineêre algebraïese vergelykings wat, indien die randvoorwaardes ook gelineariseer word i.t.v. Δy en ΔQ , dit deur enige standaard matriksmetode opgelos kan word.

Die dubbelveegmetode (Liggett and Cunge, 1975) is hoofsaaklik gekies omdat die berekeningslas eweredig aan die aantal nodes N toeneem en nie met N^3 soos dit die geval is met gewone matriksmetodes is nie. Dit is ook maklik om interne randvoorwaardes, wat baie algemeen in hierdie spesifieke probleem voorkom, in te voeg. Beskou Vgl's (14) en (15):

$$H_j \Delta y_{j+1} + B_j \Delta Q_{j+1} = C_j \Delta y_j + D_j \Delta Q_j + G_j \quad (14)$$

$$H'_j \Delta y_{j+1} + B'_j \Delta Q_{j+1} = C'_j \Delta y_j + D'_j \Delta Q_j + G'_j \quad (15)$$

Aanvaar daar is 'n lineêre verwantskap van die volgende tipe:

$$\Delta Q_j = E_j \Delta y_j + F_j \quad (16)$$

vir 'n node j . As dit waar is, kan bewys word dat dieselfde lineêre verwantskap bestaan vir die volgende node, $j+1$:

$$\Delta Q_{j+1} = E_{j+1} \Delta y_{j+1} + F_{j+1} \quad (17)$$

Vervang Vgl. (16) in Vgl's (14) en (15)

$$H_j \Delta y_{j+1} + b_j \Delta Q_{j+1} = (C_j + D_j E_j) \Delta y_j + G_j + D_j F_j \quad (18)$$

$$H'_j \Delta y_{j+1} + b'_j \Delta Q_{j+1} = (C'_j + D'_j E_j) \Delta y_j + G'_j + D'_j F_j \quad (19)$$

Uit Vgl. (18) kan 'n verwantskap gevind word tussen Δy_j en die inkremente van die afhanklike veranderlikes Δy en ΔQ vir node $j+1$ nl.

$$\Delta y_j = \frac{H_j}{C_j + D_j E_j} \cdot \Delta y_{j+1} + \frac{b_j}{C_j + D_j E_j} \cdot \Delta Q_{j+1} - \frac{G_j + D_j F_j}{C_j + D_j E_j} \quad (20)$$

Vgl. (20) word geskryf as

$$\Delta y_j = L_j \Delta y_{j+1} + M_j \Delta Q_{j+1} + N_j \quad (21)$$

waar:

$$L_j = \frac{H_j}{C_j + D_j E_j}; \quad M_j = \frac{b_j}{C_j + D_j E_j}; \quad N_j = -\frac{G_j + D_j F_j}{C_j + D_j E_j}$$

Uit Vgl's (18) en (19) kan Δy_j geëlimineer word en indien ΔQ_{j+1} geskryf word as 'n funksie van Δy_{j+1} lewer dit:

$$\Delta Q_{j+1} = \frac{H_j (C'_j + D'_j E_j) - H'_j (C_j + D_j E_j)}{b'_j (C_j + D_j E_j) - b_j (C'_j + D'_j E_j)} \cdot \Delta y_{j+1} + \frac{(G'_j + D'_j F_j)(C_j + D_j E_j) - (G_j + D_j F_j)(C'_j + D'_j E_j)}{b'_j (C_j + D_j E_j) - b_j (C'_j + D'_j E_j)} \quad (22)$$

Hierdie is duidelik die lineêre verwantskap wat aanvaar is in Vgl. (16). Daar is dus getoon dat indien die lineêre verwantskap Vgl. (16) bestaan vir enige punt in die model, dit ook waar sal wees vir al die ander punte in die model. Daar ontstaan ook 'n paar herhalingsfunksies wat gedefinieer word deur Vgl. (22):

$$E_{j+1} = \frac{H_j (C'_j + D'_j E_j) - H'_j (C_j + D_j E_j)}{b'_j (C_j + D_j E_j) - b_j (C'_j + D'_j E_j)} \quad (23)$$

$$F_{j+1} = \frac{(G'_j + D'_j F_j)(C_j + D_j E_j) - (G_j + D_j F_j)(C'_j + D'_j E_j)}{b'_j (C_j + D_j E_j) - b_j (C'_j + D'_j E_j)} \quad (24)$$

Beide koëffisiënte E_{j+1} en F_{j+1} kan vir enige node bereken word indien die koëffisiënte E_j en F_j by die vorige node bekend is. Die derde verwantskap

$$\Delta y_j = L_j \Delta y_{j+1} + M_j \Delta Q_{j+1} + N_j$$

kan weer gebruik word om Δy_j te bereken indien die inkremente Δy en ΔQ bekend is by node $j+1$.

M.b.v. hierdie herhalingsfunksies kan die waardes y^{n+1} en Q^{n+1} bereken word vir alle nodes $j = 1, 2, \dots, N-1, N$ van 'n gegewe model. Hierdie metode word uiteengesit in die vloeiagram in Fig. 2. Om die vloeiagram volledig te verstaan moet die hantering van randvoorwaardes verduidelik word.

Die randvoorwaardes moet lokaal gelineariseer word en dit beteken dat dit in die volgende vorm uitgedruk moet word.

- By die beginpunt van die kanaal, $j = 1$, word die verwantskap $\Delta Q_1 = E_1 \Delta y_1 + F_1$ benodig. (d.w.s. koëffisiënte E_1 en F_1 moet bekend wees)

- By die eindpunt van die kanaal, $j = N$, moet die waarde van Δy_N bekend wees.

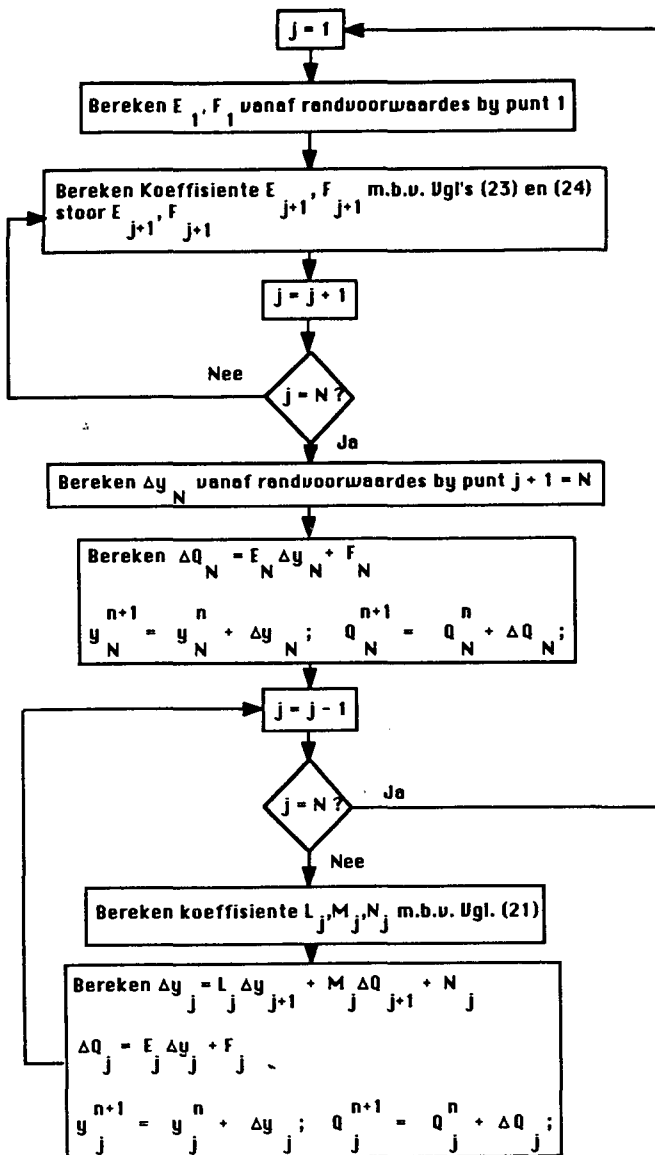
Randvoorwaardes

Eksterne randvoorwaardes

Soos gesien in die dubbelveegmetode waarmee die algebraïese vergelykings opgelos word, moet die eksterne randvoorwaardes by die eindpunte van die model die waardes van die koëffisiënte E_1 en F_1 by die beginpunt en Δy_N by die eindpunt van die kanaal beskryf.

Daar is drie verskillende tipes eksterne randvoorwaardes nl.

- (i) $y = y(t)$ gegee
- (ii) $Q = Q(t)$ gegee
- (iii) $Q = f(y)$ gegee



Figuur 2
Vloeiendiagram vir die dubbelveegmetode.

Indien E_1 en F_1 gevind moet word:

(i) Gegee $y = y(t)$:

Ons wil die koëffisiënte E_1 en F_1 in die volgende formule bepaal

$$\Delta Q_1 = E_1 \Delta y_1 + F_1$$

Die waterhoogte op tydstep $n\Delta t$, y_1 , is bekend sowel as die waterhoogte op tydstep $(n+1)\Delta t$, $\Delta y_1^{n+1} = y_1(t_n + \Delta t)$. Gevolglik is Δy 'n bekende waarde. Vanaf Vgl. (16)

$$\Delta y = \frac{\Delta Q_1}{E_1} - \frac{F_1}{E_1}$$

Δy_1 is veronderstel om onafhanklik van ΔQ_1 te wees. Die

doel is om Δy_1 gelyk aan sy ingesette waarde te hou wat ook al die waarde van ΔQ_1 mag wees. Om dit reg te kry moet

$$E_1 = \alpha$$

$$F_1 = -\alpha y((n+1)\Delta t) - y_1^n$$

$$\text{waar } \alpha \gg \Delta Q_1$$

Die koëffisiënt α moet baie groot wees, sê in die orde van 10^4 tot 10^6 . Dan sal, indien die berekenings gemaak word,

$$\Delta y_1 \simeq \emptyset + y((n+1)\Delta t) - y_1^n = \Delta y_1$$

(ii) Gegee $Q_1 = Q(t)$:

E_1 en F_1 moet bereken word sodat $\Delta Q_1 = Q(t_n + \Delta t) - Q_1^n$. Volgens Vgl. (16) is Q_1 afhanklik van Δy_1 , maar dit is veronderstel om onafhanklik van Δy_1 te wees. Om te verseker dat Δy_1 geen invloed op die randvoorwaarde het nie stel

$$E_1 = \emptyset$$

$$F_1 = Q(t_n + \Delta t) - Q_1^n$$

Dan, wat ook al die waarde van Δy_1 , ΔQ_1 sal altyd gelyk wees aan die randvoorwaarde.

(iii) Gegee $Q = f(y)$:

Waar $f(y)$ 'n polinoom of 'n getabuleerde funksie kan wees. Die koëffisiënte E_1 en F_1 van die verwantskap

$$\Delta Q_1 = E_1 \Delta y + F_1$$

moet bepaal word. Ons weet ook dat

$$\Delta Q_1^{n+1} = Q_1^n + \Delta Q_1$$

waar Q_1^n die berekende waarde is, terwyl vir 'n gegewe waarde:

$$Q_1(t_n + \Delta t) = f(y^n) + \frac{df}{dy_1} \cdot \Delta y_1$$

'n Vergelyking lewer

$$Q_1^n + \Delta Q_1 = f(y^n) + \frac{df}{dy_1} \cdot \Delta y_1$$

Los op vir ΔQ_1

$$\Delta Q_1 = f(y^n) - Q_1^n + \frac{df}{dy_1} \cdot \Delta y_1$$

so dat

$$E_1 = \frac{df}{dy_1}$$

$$\text{en } F_1 = f(y^n) - Q_1^n$$

Dit is duidelik dat $F_1 \simeq \emptyset$, maar dit is nooit presies nul nie a.g.v. afrondings- en ander foute. Dus is F_1 'n korreksie faktor.

Indien die probleem om Δy_N te bereken ondersoek word, kan die volgende prosedures duidelik gesien word:

(i) Gegee $y_N = y(t)$:

$$\Delta y_N = y(t_n + \Delta t) - y_N^n$$

(ii) Gegee $Q_N = Q(t)$, dan vanaf Vgl. (16)

$$\Delta y_N = \frac{\Delta Q_N - F_N}{E_N}$$

(iii) Gegee $Q_N = f(y_N)$

$$f(y_N^n) + \frac{df}{dy} \cdot \Delta y_N = E_N \Delta y_N + F_N + Q_N^n$$

$$\Delta y_N = \frac{f(y_N^n) - F_N - Q_N^n}{E_N - \frac{df}{dy}}$$

'n Voorbeeld van 'n eksterne randvoorwaarde by die beginpunt of aan die eindpunt van 'n kanaal is 'n sluis, Fig. 3. Die deurstroming aan die beginpunt van die kanaal kan gevarieer word deur die sluis oop of toe te maak. Die watervlak kan op dieselfde manier beheer word aan die eindpunt van 'n kanaal.

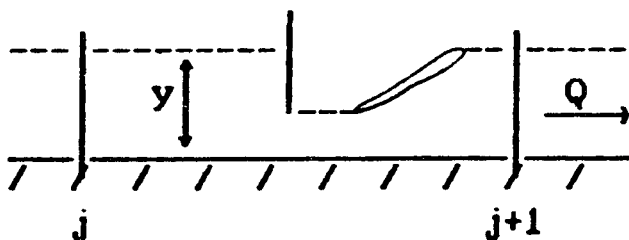
Interne randvoorwaardes

Verskeie interne randvoorwaardes kom in 'n simulasiemodel vir watervloei in besproeiingskanale voor a.g.v. sluisse, keerwalle, verandering van dwarsnitarea ens. Al hierdie randvoorwaardes word op presies dieselfde manier hanteer en die voorbeeld wat ter illustrasie gebruik word is 'n aftappunt, Fig. 4.

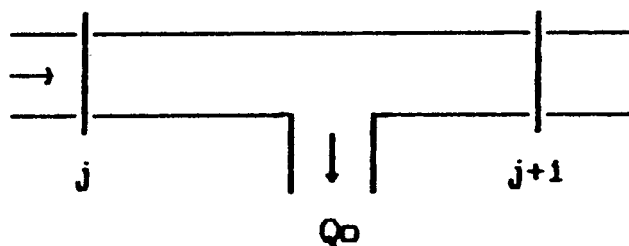
Vir elke interne randvoorwaarde kan twee vergelykings neergeskryf word. So byvoorbeeld geld die volgende twee vergelykings vir die aftappunt in Fig. 4.

$$Q_{j+1}^{n+1} = Q_j^{n+1} - Q_0 \quad (25)$$

$$y_{j+1}^{n+1} = y_j^{n+1} \quad (26)$$



Figuur 3
Sluis.



Figuur 4
Aftappunt.

Vgl's (25) en (26) kan dan vereenvoudig word deur Q_{j+1}^{n+1} en y_{j+1}^{n+1} onderskeidelik te vervang met $Q_{j+1} + \Delta Q_{j+1}$ en $y_{j+1} + \Delta y_{j+1}$ en dan te herskryf in die vorm van Vgl's (14) en (15).

$$H_j \Delta y_{j+1} + B_j \Delta Q_{j+1} = C_j \Delta y_j + D_j \Delta Q_j + G_j \quad (14)$$

$$H_j' \Delta y_{j+1} + B_j' \Delta Q_{j+1} = C_j' \Delta y_j + D_j' \Delta Q_j + G_j' \quad (15)$$

Alle interne randvoorwaardes kan dus vereenvoudig word na Vgl's (14) en (15) waarna die dubbelveegmetode daarop toepasbaar sal wees.

Toepassing

Die toepassing van 'n rekenaarprogram wat watervloei in besproeiingskanale kan simuleer word aan die hand van twee voorbeelde gedemonstreer.

Die kanaal onder beskouing word uitgebeeld in Fig. 5. Die kanaal is 3 km lank met 'n aftappunt op elke 1 km, dit het 'n konstante bodemhelling van $\frac{1}{2500}$, 'n geskatte Manning-waarde van 0,0125 en 'n aanvanklike deurstroming van $0,5 \text{ m}^3/\text{s}$ met 'n ooreenstemmende waterdiepte van 380 mm.

$$n = 0,0125; S_0 = \frac{1}{2500}; Q_0 = 0,5 \text{ m}^3/\text{s}; h = 380 \text{ mm}$$

Voorbeeld 1

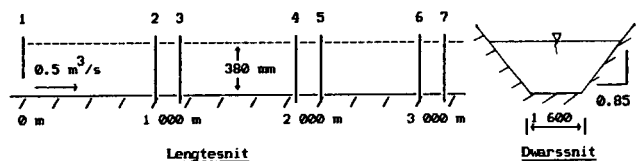
In die eerste voorbeeld word al die aftappunte toe gehou terwyl die deurstroming verhoog word van $0,5 \text{ m}^3/\text{s}$ na $0,8 \text{ m}^3/\text{s}$. 'n Simulasie is gedoen oor 'n tydperk van 150 min met 'n tydstep van 5 min. Die berekende hidrograwe van nodes 3,5 en 7 word aangetoon in Fig. 6.

Voorbeeld 2

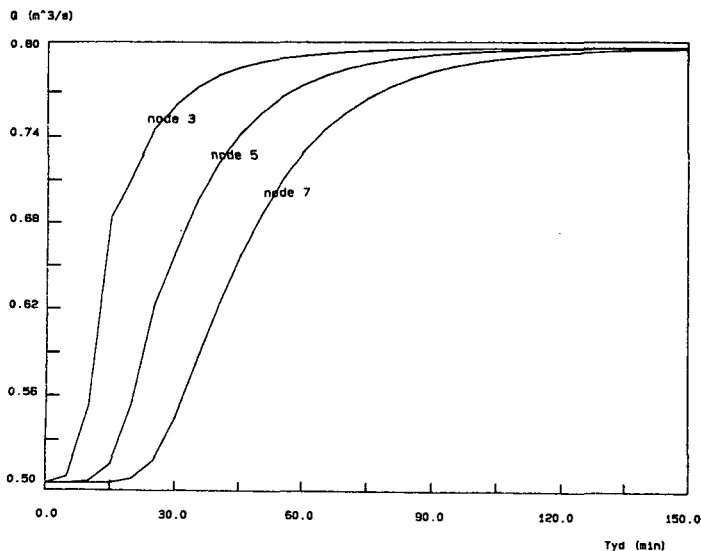
Die effektiwiteit van 'n bedryfsprosedure van 'n besproeiingskema word onder andere bepaal deur die hoeveelheid water wat aan die eindpunt van 'n kanaal wegvloei. Hierdie volume water word beskou as 'n verlies en dit is moontlik om m.b.v. die rekenaarprogram vir verskillende bedryfsprosedures hidrograwe by die eindpunt van die kanaal te bereken wat dan met mekaar vergelyk kan word.

In die tweede voorbeeld word twee alternatiewe bedryfsprosedures teenoor mekaar opgeweg. Daar word aanvaar dat die aanvraag na water by elke aftappunt $0,1 \text{ m}^3/\text{s}$ is en dat die deurstroming by die beginpunt van die kanaal verhoog word van $0,5 \text{ m}^3/\text{s}$ na $0,8 \text{ m}^3/\text{s}$ in die eerste tydstep van berekening.

Vir die eerste bedryfsprosedure is looptye m.b.v. die rekenaarprogram bepaal vanaf die beginpunt van die kanaal tot by elke afsonderlike aftappunt. Die looptye vanaf node 1 tot by aftappunte 2,4 en 6 is respektiewelik 65 min, 35 min en 40 min. 'n



Figuur 5
Die kanaal onder beskouing.



Figuur 6
Die berekende hidrograwe van nodes 3, 5 en 7.

Simulasie is gedoen oor 'n tydperk van 200 min met 'n tydstep van 5 min. Die berekende hidrograaf van node 7 word getoon in Fig. 7. Die oppervlakte onder hierdie kromme dui die volume water aan wat ongebruik by node 7 verbyvloei.

Vir die tweede bedryfsprosedure is al die aftappunte gelyktydig na 60 min oopgemaak. Die simulasie is herhaal oor 'n tydperk van 200 min en die berekende hidrograaf van node 7 word getoon in Fig. 7.

Die tweede bedryfsprosedure toon duidelik 'n groter waterverlies as in die eerste geval aan. Dit is dus moontlik om alternatiewe bedryfsprosedures te simuleer om sodoende 'n optimale bedryfsprosedure daar te stel wat 'n minimum waterverlies tot gevolg sal hê.

Verdere uitbreiding

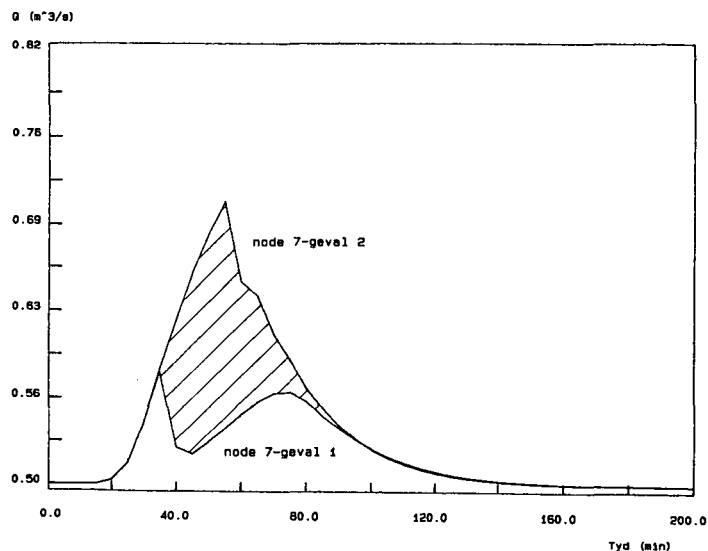
Daar word beoog om die rekenaarprogram in sy huidige vorm te gebruik as basis vir die ontwikkeling van 'n optimiseringsmodel waarmee bedryfsverwante verliese op besproeiingskemas geoptimeer kan word.

Erkenning

Hierdie projek word tans uitgevoer aan die Randse Afrikaanse Universiteit met finansiële ondersteuning van die Waternavorsingskommissie. Die een outeur (N. Benade) is deur die Departement van Waterwese na die Randse Afrikaanse Universiteit gesekondeer vir hierdie navorsing.

Verwysings

- ABBOTT, M.B. (1979) *Computational hydraulics*.
 LIGGETT, J.A. and CUNGE, J.A. (1975) Numerical methods of solution of the unsteady flow equations, Chapter 4 of *Unsteady Flow in Open Channels*, Water Resources Publications, Fort Collins, Colorado.
 UNSTEADY FLOW IN OPEN CHANNELS (1975) Vols (i) and (ii), Edited by K. Mahmood and V. Yevjevick, Water Resources Publ.



Figuur 7
Die berekende hidrograaf van node 7.